„Über eindeutige Beziehungen u. s. w. Sitzung vom 19. April 1883, Artikel 4 und 7.)

„Jede der drei fundamentalen nicht axialen Beziehungen, d. h. jedes der Systeme correspondirender Punkte wird aus jeder Bisecante in einer quadratischen Ebeneninvolution projicirt.“

Dies folgt unmittelbar aus der Vertauschungsfähigkeit der Beziehung; denn sind x, y die Schnittpunkte von R_4 mit einer durch die Bisecante hindurchgehenden Ebene ξ und x', y' die ihnen in einem Systeme correspondirenden Punkte, so müssen nach Früherem diese beiden Punkte in einer und derselben durch die Bisecante gehenden Ebene ξ' liegen. Die eindeutige und involutorische Beziehung zwischen den Ebenen ξ, ξ' des Büschels, dessen Axe die Bisecante ist, ist unmittelbar klar. So entstehen an jeder Bisecante drei quadratische Ebeneninvolutionen, welche bestimmt erscheinen, durch die vier durch die Bisecante hindurchgehenden Tangentialebenen, wenn man sie in zwei die Involution fixirende Paare zerlegt, was eben in drei Arten geschehen kann

35. Fassen wir die Resultate der letzten Betrachtungen zusammen, so haben wir folgende Ergebnisse:

„Es gibt auf einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species R_4 im Allgemeinen nur zwei Arten von eindeutigen Punktbeziehungen: die axialen und die nicht axialen. Durch ein Paar entsprechender Punkte x, x' ist eine axiale und eine nichtaxiale eindeutige Punktbeziehung vollkommen bestimmt. Die Punktepaare der ersten liegen auf Strahlen, welche einer durch R_4 hindurchgehenden und auch den Strahl $\overline{xx'}$ enthaltenden Fläche zweiter Ordnung angehören, und daher sind die Erzeugenden dieser Fläche, welche dem zweiten Systeme angehören, Axen von Ebenenbüscheln, von denen jedes auf R_4 die Paare der Beziehung bestimmt; die Paare yy', zz' der nicht axialen Punktbeziehung erhält man durch Projection der Punkte x', x aus den einzelnen Bisecanten von R_4 auf die Curve. Den axialen Beziehungen haftet das Merkmal der Vertauschungsfähigkeit an. Unter den nichtaxialen eindeutigen Beziehungen gibt es nur

drei, bei denen Vertauschungsfähigkeit auftritt, es sind dies die drei Systeme correspondirender Punkte auf R_4. Jede axiale Beziehung besitzt vier Doppelelemente, die Berührungspunkte der vier durch irgend eine jener Axen an R_4 gehenden Tangentialebenen. Eine nichtaxiale Beziehung besitzt keinen Doppelpunkt, oder es ist jeder Punkt von R_4 ein solcher. Diese eindeutige Beziehung, welche man erhält, wenn man jeden Punkt von R_4 sich selbst entsprechen lässt, muss auch als eine nichtaxiale vertauschungsfähige Beziehung betrachtet werden, so dass wir im Ganzen vier solche fundamentale, durch die Curve R_4 im vorhinein gegebene nicht axiale vertauschungsfähige Beziehungen zu bemerken haben.

Die axialen Beziehungen ordnen sich in Paare residualer Beziehungen. Jedes Paar der einen Beziehung liegt mit jedem Paare der anderen in einer Ebene. Zwei solche residuale Beziehungen werden auf R_4 bestimmt durch die beiden Erzeugendensysteme irgend einer durch R_4 hindurchgehenden Fläche zweiter Ordnung. Es gibt vier sich selbst residuale durch die Curve im vorhinein gegebene oder fundamentale axiale Beziehungen; sie werden auf R_4 bestimmt durch die Kanten der vier quadratischen Kegel, welche man durch die Curve legen kann. Die Doppelpunkte derselben sind die Berührungspunkte der sechzehn stationären Schmiegungsebenen".

36. Wir bezeichnen die durch irgend ein Punktepaar x, x' von R_4 bestimmte nicht axiale eindeutige Beziehung mit $E(x, x')$ oder kurz mit E und fragen nach der Regelfläche, welche die Verbindungsgeraden $\overline{xx'}$ je zweier entsprechender Punkte enthält, und so als Erzeugniss der E-Beziehung auftritt.

Das Erzeugniss einer J_1^2 ist eine durch R_4 gehende Fläche zweiter Ordnung, welche zugleich als Erzeugniss der zur J_1^2 residualen Paarinvolution auftritt.

Für das Erzeugniss der E-Beziehung ist offenbar R_4 eine Doppelcurve, da durch jeden Punkt $x \equiv y'$ von R_4 zwei Erzeugende, nämlich $\overline{xx'}$ und $\overline{y'y}$ hindurchgehen.

Um die Ordnung (und zugleich Classe) des Erzeugnisses zu bestimmen, fragen wir nach den Erzeugenden desselben, welche eine beliebige Bisecante A von R_4 schneiden ohne durch die A und R_4 gemeinsamen Punkte hindurchzugehen, von welcher Art es offenbar vier Erzeugende gibt. Die E-Beziehung projicirt sich aus A durch ein symmetrisches Ebenenbüschel zweiten Grades; dasselbe besitzt vier Doppelebenen erster Art (sich selbst entsprechende Ebenen; vergl. „Über einen Correspondenzsatz." Sitzung vom 8. März 1883), von denen also jede ein Punktepaar der E-Beziehung und somit eine Erzeugende der fraglichen Regelfläche enthält.

Es seien $\xi\eta\zeta\omega$ jene Doppelebenen und $XYZW$ die in ihnen gelegenen Erzeugenden der Fläche. Die Schnittpunkte von A mit $XYZW$ sind zugleich vier Schnittpunkte von A mit der Fläche, hierzu kommen noch die beiden auf A gelegenen doppelt zu zählenden Punkte von R_4, so dass A mit der Fläche im Ganzen acht Punkte gemeinschaftlich hat:

„Das Erzeugniss einer auf R_4 auftretenden nicht-axialen eindeutigen Punktbeziehung, d. h. der Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte ist eine Regelfläche achter Ordnung (und Classe) F_8, welche die Curve R_4 zur Doppelcurve besitzt."[1]

Die durch die Bisecante A an die, den einzelnen E-Beziehungen entsprechenden F_8-Flächen gehenden Tangentialebenenquadrupel ξ, η, ζ, ω bilden eine degenerirte biquadratische Involution, welche drei nur Doppelelemente enthaltende Quadrupel aufweist. Die letzteren sind dargestellt durch die Doppelelementenpaare der drei quadratischen Involutionen, in denen sich aus A die drei Systeme correspondirender Punkte von R_4 projiciren.

Die an den einzelnen Bisecanten von R_4 in dieser Art auftretenden biquadratischen Ebeneninvolutionen sind offenbar projectivisch, woraus die Unveränderlichkeit des Doppelverhältnisses $(\xi\eta\zeta\omega)$ für eine E-Beziehung, d. h. für eine F_8-Fläche und

[1] Siehe: Axel Harnack, Über die Darstellung der Raumcurven vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystems durch doppelt periodische Functionen". Mathem. Annalen von Clebsch u. Neumann, 12. Band.

für alle Bisecanten von R_4 folgt. (Vergl.: „Über eindeutige Beziehungen auf einer allg. eb. Curve 3. Ord." l. c. Art. 10. Axel Harnack, l. c. p. 78).

Da die vier in ξ, η, ζ, ω gelegenen Erzeugenden $XYZW$ der Fläche F_8 vier Bisecanten sind, welche A schneiden, so sind es vier Erzeugende der durch R_4 und A hindurchgehenden Fläche zweiter Ordnung, und daher ist das Doppelverhältniss $(\xi\eta\zeta\omega)$ gleich dem Doppelverhältnisse der vier Punkte, in denen A die Erzeugenden $XYZW$, d. h. die Fläche F_8 schneidet. Es ist somit das Doppelverhältniss der vierpunktigen Gruppen, in denen die Bisecanten von R_4 eine Fläche F_8 schneiden, für alle Bisecanten constant." (Axel Harnack l. c.)

37. „Projicirt man ein Paar entsprechender Punkte xx' einer E-Beziehung aus einem der vier Kegelscheitel o_i auf die Curve, so erhält man ein anderes Paar y', y entsprechender Punkte derselben Beziehung in verkehrter Ordnung."

Denn die beiden wechselweisen Verbindungsgeraden $\overline{xy'}, \overline{x'y}$ sind Erzeugende einer durch R_4 gehenden Fläche zweiter Ordnung, nämlich des entsprechenden Kegels K_i.

Diese beiden Erzeugenden $\overline{xx'}, \overline{yy'}$ der Fläche F_8 schneiden sich in einem Punkte, welcher einer Doppelcurve der Fläche F_8 angehört und, wie aus dem vollständigen Vierecke $xx'yy'$ sofort folgt, in der Polarebene des Kegelscheitels o_i, d. h. in der durch die drei übrigen Kegelscheitel bestimmten Ebene liegen muss. Die Fläche hat somit in dieser Ebene eine Doppelcurve, welche also vom vierten Grade sein muss. Es besitzt somit F_8 in jeder Ebene des Tetraëders $o_1o_2o_3o_4$ eine Doppelcurve vierter Ordnung."

Die vier Erzeugenden von F_8, welche irgend eine Erzeugende xx' der Fläche schneiden, erhält man nach obigem, indem man das Punktepaar x, x' aus o_1, o_2, o_3, o_4 der Reihe nach auf R_4 projicirt und die entstehenden Punktepaare $y_i y_i'$ $(i = 1..4)$ verbindet. Man kann ebenso wie im vorigen Artikel die E-Beziehung aus den Geraden $\overline{xx'} \equiv A$ projiciren, erhält ein symmetrisches Ebenenbüschel zweiten Grades, dessen vier Doppelebenen erster

Art $\xi\eta\zeta\omega$ jene vier Erzeugenden $XYZW$ enthalten, welche der Erzeugenden A in Punkten der Ebenen des Tetraëders $o_1o_2o_3o_4$ begegnen.

Da auch hier das im letzten Artikel Gesagte gilt, so wird das Doppelverhältniss $(\xi\eta\zeta\omega)$ für alle Erzeugenden constant bleiben, oder aber auf die Punkte, in denen $XYZW$ die Gerade A schneiden, übergehend:

„Die Erzeugenden der Fläche F_8 werden von den Ebenen des Tetraëders $o_1o_2o_3o_4$ in vierpunktigen Gruppen mit constantem Doppelverhältnisse geschnitten.“ (A. Harnack l. c.)

Die im vorigen Artikel betrachteten vier Erzeugenden $XYZW$ sind gemeinschaftlich der Fläche F_8 und dem durch die Curve R_4 und die Bisecante A bestimmten Hyperboloide, und wir haben den Satz:

„Eine auf R_4 befindliche E-Beziehung und eine axiale Paarinvolution haben vier Paare entsprechender Elemente gemeinsam.“

Oder, da dasselbe von der residualen Paarinvolution gilt:

„Eine Fläche F_8 schneidet jede durch R_4 gelegte Fläche zweiter Ordnung in vier Erzeugenden des einen und in vier Erzeugenden des anderen Systemes. Das Doppelverhältniss dieser Erzeugendenquadrupel ist für eine Fläche F_8 constant.“

Auf die sich selbst residualen Paarinvolutionen übergehend hat man sofort:

„Jede Fläche F_8 berührt jeden der vier Kegel zweiter Ordnung K_i, welche man durch die R_4 legen kann, längs vier Erzeugenden; die vier Punkte o_i sind folglich Doppelpunkte der ebenen Doppelcurven der Flächen F_8. Diese Doppelcurven vierter Ordnung sind, weil mit drei Doppelpunkten versehen, rationale Curven.“ (Axel Harnack, l. c.)

38. Ersetzt man die allgemeine E-Beziehung durch eine der vier fundamentalen vertauschungsfähigen Beziehungen, so erhält man specielle Fälle von F_8. Der fundamentalen E-Beziehung, nach welcher jeder Punkt von R_4 sich selbst zugeordnet ist, entspricht die abwickelbare Tangentenfläche von R_4 als Fläche F_8.

Jeder der drei fundamentalen E-Beziehungen, welche die Paare correspondirender Punkte jedes der drei Systeme darstellen, entspricht eine durch R_4 einfach hindurchgehende Fläche vierter Ordnung, welche, doppelt gezählt, die entsprechende F_8 darstellt.

Dass die R_4 für eine solche Fläche einfache Curve ist, erkennt man aus dem Umstande, dass durch jeden Punkt von x nur eine Erzeugende $\overline{xx'}$ hindurchgeht, da sich die correspondirenden Punkte x, x' vertauschungsfähig entsprechen. Wird die aus diesen Paaren correspondirender Punkte bestehende fundamentale E-Beziehung aus einer beliebigen Bisecante A projicirt, so ergibt sich, wie gezeigt wurde, eine quadratische Ebeneninvolution, welche zwei Doppelebenen besitzt, so dass jede Bisecante nur von zwei Erzeugenden der Fläche (in der R_4 nicht angehörigen Punkten) getroffen wird. Die Fläche ist somit in der That von der vierten Ordnung.

Wird die fundamentale E-Beziehung, deren Erzeugniss diese Fläche vierter Ordnung ist, aus einer Erzeugenden A der Fläche projicirt, so ergibt sich eine quadratische Ebeneninvolution, deren zwei Doppelebenen jene beiden Erzeugenden XY enthalten, welche A schneiden,

Jede von diesen Erzeugenden vertritt somit zwei von den vier Erzeugenden $XYZW$ des allgemeinen Falles, so dass die Schnittpunkte von A mit X und Y jeder doppelt gezählt in den vier Ebenen des Tetraëders $o_1 o_2 o_3 o_4$ liegen müssen, was nur dadurch möglich ist, dass der Punkt (AX) in einer Kante und der Punkt (AY) in der Gegenkante des Tetraëders gelegen ist.

Es schneidet somit jede Erzeugende der Fläche zwei Gegenkanten des Tetraëders und dieselben treten somit als Doppelgerade und als Leitlinien der Fläche auf. (Axel Harnack, l. c.)

„Verbindet man je zwei correspondirende Punkte von R_4, welche einem System angehören, so erfüllen die Verbindungsgeraden eine Regelfläche vierter Ordnung, welche zwei Gegenkanten des Tetraëders $o_1 o_2 o_3 o_4$ zu doppelten Leitgeraden besitzt; den drei Systemen correspondirenden Punkten, und den drei Gegenkantenpaaren des obigen Tetraëders entsprechen drei solche Regelflächen vierter Ordnung.“

39. „Jede nichtaxial eeindeutige Punktbeziehung auf R_4 kann auf unendlich viele Arten durch zwei axiale Paarbeziehungen ersetzt werden."

Es sei y, y' irgend ein Punktepaar einer E-Beziehung, durch welches dieselbe dann auch bestimmt ist, u irgend ein Curvenpunkt, welcher mit y, y' verbunden, die Bisecanten S, S' liefern mag, welche wir als Axen von Ebenenbüscheln betrachten, die auf R_4 zwei axiale Involutionen JJ' bestimmen. Den zu x nach der J' entsprechenden Punkt (x) erhalten wir als vierten Schnittpunkt von R_4 mit der Ebene $S'x$ und der zu (x) nach der J entsprechende Punkt, d. h. der vierte Schnittpunkt von R_4 mit der Ebene $S(x)$ sei x'. Wir behaupten, dass xx' auch ein Punktepaar der E-Beziehung ist. In der That liegen $xy'u(x)$ in der ersten, und $x'yu(x)$ in der zweiten Ebene, und somit sind $\overline{xy'}$, $\overline{x'y}$ zwei Erzeugende der durch R_4 und $u(x)$ hindurchgehenden Fläche zweiten Grades und folglich sind xx', yy' zwei Punktepaare einer und derselben E-Beziehung, w. z. b. w.

Man gelangt also von x zu x', wenn man zu x in der J' den Punkt (x) und zu diesem in der J den Punkt x' bestimmt. Symbolisch:

$$JJ \equiv E$$

(Vergl. „Über eindeutige Beziehungen auf einer Curve u. s. w." Sitzung v. 19. April 1883. Art. 15).

„Man kann also je zwei aufeinander folgende J durch eine E und jede E durch zwei aufeinanderfolgende J ersetzen."

Geht man vom Punkte x mittelst der E-Beziehung zum Punkte x' und von diesem mittelst der J-Beziehung zum Punkte (x) über, oder umgekehrt, so hat man zwei Punkte x, (x), welche einer Paarinvolution J' angehören. Symbolisch:

$$EJ \equiv J, \quad JE \equiv J, \qquad \text{d. h.}$$

„Zwei aufeinanderfolgende ungleichartige Operationen (EJ oder JE) kann man immer durch eine axiale Paarinvolution ersetzen."

Man kann nun in derselben Art, wie es in der zuletzt angeführten Arbeit „Über eindeutige Punktbeziehungen auf einer

allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung" geschehen ist, den allgemeinen Satz entwickeln, und als bewiesen betrachten:

„Beliebig viele, beliebig aufeinander folgende, eindeutige Beziehungen kann man durch eine axiale oder eine nichtaxiale Beziehung (durch eine J_1^2 oder eine E) ersetzen, je nachdem die Zahl der auftretenden sämmtlichen axialen Beziehungen eine ungerade oder eine gerade Zahl ist."

Man gelangt in derselben Art wie in obgenannter Arbeit zu den folgenden Sätzen:

„Wird der Curve R_4 ein einfaches $2n$-Eck eingeschrieben, und bewegen sich alle seine Seiten bis auf eine auf beliebigen durch R_4 hindurchgehenden Flächen zweiter Ordnung, so bewegt sich auch die letzte Seite auf einer solchen Fläche zweiter Ordnung."

„Es gibt vier einfache $(2n—1)$-Ecke, welche der Curve R_4 eingeschrieben sind und deren Seiten auf $(2n—1)$ gegebenen durch R_4 hindurchgehenden Flächen zweiter Ordnung liegen."

„Wenn durch R_4 beliebige $2n$ Flächen zweiter Ordnung hindurchgelegt werden, so gibt es im Allgemeinen kein einfaches $2n$-Eck, welches R_4 eingeschrieben wäre und dessen Seiten der Reihe nach auf jenen Flächen gelegen wären; gibt es aber ein solches $2n$-Eck, so gibt es deren unendlich viele."

„Wenn $p—1$ Seiten eines der R_4 eingeschriebenen p-Eckes auf $(p—1)$ Flächen achter Ordnung von der betrachteten Art fortrücken, so beschreibt auch die letzte Seite eine solche Fläche achter Ordnung."

„Wenn $(p—1)$ Seiten eines variablen der R_4 eingeschriebenen einfachen p-Ecks theils auf Flächen zweiter, theils auf Flächen achter Ordnung betrachteter Art fortrücken, so bewegt sich auch die letzte Seite auf einer Fläche zweiter oder achter Ordnung, je nachdem die Zahl der auf Flächen zweiter Ordnung fortrückenden Seiten eine ungerade oder eine gerade Zahl ist."

40. In derselben Art wie bei Curven dritter Ordnung kann man auch an den Raumcurven vierter Ordnung erster Species „cyclische Beziehungen mit n-punktigen Gruppen“ betrachten.

Hat man nämlich auf R_4 eine E-Beziehung und construirt, von einem Punkte x_1 ausgehend, die Punktreihe $x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}$, so dass jeder Punkt dem vorhergehenden entspricht, so wird offenbar auch x_1 mit x_{n+1} in eindeutiger nichtaxialer Beziehung stehen, und wenn es einmal geschieht, dass x_{n+1} mit x_1 zusammenfällt, so muss es nach Früherem immer geschehen, von welchem Punkte x_1 auf R_4 man auch ausgehen möge.

„Jeder Punkt von R_4 kommt in einer einzigen durch ihn vollkommen bestimmten Gruppe vor.“

„Die sämmtlichen Gruppen einer cyclischen Beziehung erhält man aus einer von ihnen durch Projection aus den einzelnen Bisecanten auf die Curve.“

„Werden zwei Gruppen festgehalten, so erfüllen die Bisecanten, aus denen durch Projection die Gruppen ineinander übergeführt werden können, n Flächen zweiter Ordnung. Die beiden Gruppen können auch identisch werden.“

„Wenn die Gruppen einer cyclischen Beziehung auf R_4 eine gerade Anzahl von Punkten enthalten, so bilden sie einfache Polygone, deren Gegeneckenpaare Paare correspondirender Punkte desselben Systemes sind.“

41. Projicirt man die Curve R_4 mit allen auf ihr befindlichen eindeutigen Punktbeziehungen aus einem ihrer Punkte auf eine Ebene, so erhält man eine ebene allgemeine Curve dritter Ordnung mit allen auf ihr auftretenden eindeutigen Punktbeziehungen. Mit Rücksicht auf das über die letzteren Entwickelte kann man sofort die cyclischen Beziehungen mit dreielementigen Gruppen angeben. Durch jeden Punkt p von R_4 gehen neun Schmiegungsebenen, deren Berührungspunkte zu je dreien in einer durch p gehenden Ebene gelegen sind. Solcher Ebenen hat man zwölf, welche sich in vier Dreiflache ordnen, von denen jedes alle neun Berührungspunkte enthält. Lässt man den Punkt p auf der Curve

gleiten, so beschreiben die drei in den Ebenen eines solchen Dreiflaches gelegenen Punktetripel eine cyclische Punktbeziehung mit dreipunktigen Gruppen.

„Es gibt somit vier cyclische Beziehungen mit dreipunktigen Gruppen auf R_4."

42. Sowie auf Curven dritter Ordnung können wir auch auf der Raumcurve vierter Ordnung erster Species R_4 Punktinvolutionen n-ten Grades und $(n-1)$-ter Stufe J^n_{n-1} betrachten, indem wir unter einer J^n_{n-1} eine $(n-1)$-fach unendliche Menge von n-punktigen Gruppen verstehen, von denen jede durch $(n-1)$ ihrer Punkte vollkommen und eindeutig bestimmt ist.

Wir haben zunächst für eine Tripelinvolution zweiter Stufe J^3_2 den Satz:

„Die durch die einzelnen Tripel einer J^3_2 bestimmten Ebenen schneiden R_4 in einem festen Punkte, dem Centrum o der Involution J^3_2."

Dass die durch einen Punkt o von R_4 gehenden Ebenen R_4 in Tripeln einer J^3_2 schneiden, ist nach obiger Definition unmittelbar klar.

Hat man umgekehrt eine J^3_2 auf R_4 und ist $x_1 x_2 x_3$ irgend ein Tripel derselben, und o der vierte Schnittpunkt von R_4 mit der Ebene $(x_1 x_2 x_3)$, so projicire man die R_4 sammt der J^3_2 aus o auf irgend eine nicht durch o gehende Ebene. Man erhält eine C_3 und auf derselben eine J^3_2 mit einem geraden Tripel, welches aus den Projectionen von x_1, x_2, x_3 besteht. Die J^3_2 auf C_3 enthält also lauter gerade Tripel (Art. 2) und somit besteht die J^3_2 auf R_4 aus lauter Tripeln, deren Ebenen durch o gehen, w. z. b. w. Hieraus:

„Eine Tripelinvolution zweiter Stufe auf R_4 ist durch eines ihrer Tripel vollkommen bestimmt."

„Jede J^3_2 auf R_4 besitzt neun dreifache Punkte, die Berührungspunkte der durch das Centrum o gehenden Schmiegungsebenen."

43. Es sei auf R_4 eine Quadrupelinvolution dritter Stufe J^4_3 gegeben und $x_1 x_2 x_3 x_4$ sei irgend ein Quadrupel derselben. Hält man den Punkt x_1 fest, so bilden der Definition gemäss die Tripel $x_2 x_3 x_4$ eine J^3_2 und ihre Ebenen ξ_1 werden durch einen festen Punkt o_1 der R_4 hindurchgehen. So ist jedem Punkte x_1 ein Punkt

o_1 zugeordnet; aber auch umgekehrt, entspricht einem o_1 nur ein Punkt x_1. Dann legt man durch o_1 eine beliebige Ebene ξ_1, welche R_4 in $x_2 x_3 x_4$ schneidet, so wird dieses Tripel durch einen ganz bestimmten Punkt x_1 zu einem Quadrupel ergänzt, welcher Punkt von der besonderen Lage der durch o_1 gehenden Ebene unabhängig ist, da einerseits die mit x_1 Quadrupel der J_3^4 bildenden Tripel eine J_2^3 bilden, welche anderseits durch obiges Tripel $x_2 x_3 x_4$ vollkommen bestimmt wird.

„Durch jede J_3^4 auf R_4 ist somit auf R_4 eine eindeutige Punktbeziehung gegeben, indem jedem Punkte x von R_4 das Centrum o der J_2^3 entspricht, deren Tripel den Punkt o zu Quadrupeln der J_3^4 ergänzen."

„Eine J_3^4 auf R_4 ist durch ein Quadrupel von Punkten vollkommen bestimmt."

Ist $x_1 x_2 x_3 x_4$ das Quadrupel und $o_1 o_2 o_3 o_4$ die vierten Schnittpunkte von R_4 mit den Ebenen des Tetraëders $x_1 x_2 x_3 x_4$, wie sie den Ecken der Reihe nach gegenüberliegen, so sind (Art. 33) $x_1 o_1$, $x_2 o_2$, $x_3 o_3$, $x_4 o_4$ vier Punktepaare einer E-Beziehung, durch welche die J_3^4 nun gegeben ist.

Um ein Tripel $x'_1 x'_2 x'_3$ zu ergänzen, lege man durch dasselbe eine Ebene, welche R_4 in o'_4 schneiden wird, und construire den zu o'_4 nach der E entsprechenden Punkt x'_4 (also so dass z. B. $x_1 o'_4$ und $x'_4 o_1$ Erzeugende einer durch R_4 gehenden Fläche zweiter Ordnung sind.) Dann ist x'_4 der vierte Punkt des Quadrupels.

Vier in einer Ebene gelegene Punkte von R_4 bilden ein „ebenes Quadrupel". Ein unmittelbar klarer Satz:

„Alle ebenen Quadrupel stellen eine J_3^4 dar."

Die zugehörige E-Beziehung ordnet jeden Punkt der Curve sich selbst zu; denn hier ist $o_1 \equiv x_1$, $o_2 \equiv x_2$ . .

44. Hält man ein Punktepaar $x_1 x_2$ fest, so bilden, wie aus der Definition sofort folgt, die Paare $x_3 x_4$, welche ersteres zu Quadrupeln einer gegebenen J_3^4 erzeugen, eine J_1^2; und hält man eines der Paare $x_3 x_4$ fest, so werden die Paare $x_1 x_2$ eine zweite $J_1'^2$ bilden. Jedes Paar von J_1^2 bildet mit jedem Paare von $J_1'^2$ ein Quadrupel der J_3^4.

„Es werden somit durch eine J_3^4 die auf R_4 auftretenden axialen Paarinvolutionen in Paare ge-

ordnet. Demgemäss werden auch die durch R_4 gelegten Regelschaaren zweiter Ordnung in Paare geordnet. Je zwei durch die Involution der ebenen Quadrupel einander zugeordnete Regelschaaren gehören derselben Fläche zweiter Ordnung an."

45. „Alle Flächen zweiter Ordnung, welche durch sechs Punkte von R_4 hindurchgehen, schneiden R_4 in Punktepaaren einer axialen Paarinvolution."

Mit anderen Worten: „Alle Flächen zweiter Ordnung, welche durch sieben Punkte von R_4 hindurchgehen, schneiden R_4 noch in einem und demselben achten Punkte." (Restsatz.)

Es seien p_i ($i = 1 .\ .6$) irgend sechs feste Punkte von R_4; die durch sie hindurchgehenden F_2 schneiden die Ebene $(p_1 p_2 p_3)$ in Kegelschnitten, welche durch p_1, p_2, p_3 hindurchgehen, und die Ebene $(p_4 p_5 p_6)$ in Kegelschnitten, welche durch p_4, p_5, p_6 hindurchgehen. Wir werden also alle unsere Flächen erhalten, wenn wir zwei solche Kegelschnitte, aber so wählen, dass sie die Schnittgerade der beiden Ebenen in denselben zwei Punkten schneiden. Wählen wir also in der ersten Ebene einen Punkt q_1, in der zweiten einen q_2, so werden zwei solche Kegelschnitte und zugleich ein durch sie gehendes Flächenbüschel zweiter Ordnung, welches auf R_4 offenber eine J_1^2 bestimmen wird, gegeben sein. Diese J_1^2 ist aber von q_1 und q_2 unabhängig, denn die zwei Punkte, in denen die beiden Ebenen R_4 schneiden, bilden offenbar ein Punktepaar der J_1^2, welche durch dasselbe auch bestimmt ist.

Damit ist obiger Satz und zugleich der folgende bewiesen:

„Die zehn Gegenebenenpaare eines der R_4 eingeschriebenen vollständigen Sechseckes schneiden R_4 in zehn Punktepaaren eines J_1^2. Die zehn Verbindungsgeraden dieser Paare sind folglich Erzeugende einer durch R_4 hindurchgehenden F_2."

Lässt man R_4 in eine Raumcurve dritter Ordnung und eine Bisecante derselben übergeheu, so erhält man den Satz, „dass die zehn Gegenebenenpaare eines der Curve dritter Ordnung eingeschriebenen vollständigen Sechseckes jede Bisecante in zehn Punktepaaren einer quadratischen Involution schneiden". (Vergl.: „Über die Bedeutung des räumlichen Nullsystems für

cubische Involutionen beider Stufen. Art. 16. Sitzung vom 15. December 1881).

46. Aus den letzten Betrachtungen folgt der Definition gemäss, sofort:

„Alle Flächen zweiter Ordnung, welche durch fünf Punkte von R_4 hindurchgehen, schneiden die Curve in Tripeln einer J_2^3, d. h. in Tripeln, deren Ebenen durch einen festen Punkt von R_4 hindurchgehen.“

„Alle Flächen zweiter Ordnung, welche durch vier, drei, respective zwei Punkte von R_4 hindurchgehen, schneiden R_4 in Quadrupeln, Quintupeln, respective Sextupeln einer J_3^4, J_4^5, respective J_5^6.“

47. Wir haben gesehen, dass jede J_4^5 zu einer E-Beziehung Veranlassung gibt. Umgekehrt erkennt man:

„Durch jede E-Beziehung sind zwei Quadrupelinvolutionen auf R_4 bestimmt, je nachdem man nämlich von zwei nach der E-Beziehung zusammengehörigen Punkten den einen oder den anderen als den Punkt o betrachtet.“

Sind nämlich x, o irgend zwei einander entsprechende Punkte der E-Beziehung, so bildet x mit jedem Tripel, dessen Ebene durch o geht, ein Quadrupel eines J_3^4, aber ebenso bildet o mit jedem Tripel, dessen Ebene durch x geht, ein Quadrupel einer zweiten (J_3^4).

„Diese beiden Quadrupelinvolutionen dritter Stufe sind residual, d. h. jedes Quadrupel der einen stellt mit jedem Quadrupel des anderen die acht Schnittpunkte von R_4 mit Flächen zweiter Ordnung dar.“

Betrachtet man nämlich eine J_3^4 und legt durch ein Quadrupel x_i $(i = 1 \ldots 4)$ eine F_2, welche R_4 in o_i $(i = 1 \ldots 4)$ schneidet, so wird die J_3^4 durch jene F_2 auf R_4 bestimmt, welche durch irgend eines der Quadrupel o_i gehen.

Diese Quadrupel o_i bilden nun offenbar eine zweite (J_3^4) und beide Quadrupelinvolutionen sind in der Beziehung, dass jedes Quadrupel der einen mit jedem der anderen in einer F_2 liegt. Dass beiden dieselbe E-Beziehung, mit vertauschter Bedeutung

entsprechender Punkte zukommt, sieht man sofort, wenn man die durch x_1 gehende Fläche F_2 ersetzt durch die Ebene $(x_2 x_3 x_4)$ und irgend eine durch x_1 gehende Ebene.

„Den drei vertauschungsfähigen E-Beziehungen correspondirender Punkte entsprechen drei sich selbst residuale J_3^4, in deren Quadrupeln die R_4 von Flächen zweiter Ordnung (also vierfach) berührt wird."

48. Je zwei J_{n-1}^n können durch axiale Projection ineinander übergeführt werden, wobei auch die singulären Elemente ineinander übergehen.

Hieraus ergibt sich speciell, dass jede J_3^4 sechzehn vierfache Punkte besitzt, welche durch axiale Projection aus den Berührungspunkten der sechzehn stationären Schmiegungsebenen abgeleitet werden können.

Über die Oxydation des Morphins.

(Vorläufige Mittheilung.)

Von **L. Barth** und **H. Weidel.**

(Aus dem I. Wiener Universitätslaboratorium.)

Obwohl schon seit längerer Zeit mit der Untersuchung der Einwirkung verschiedener Oxydationsmittel auf Morphin beschäftigt, ist es uns bisher mannigfacher Hindernisse wegen nicht möglich gewesen diese Arbeit zu einem entsprechenden Abschlusse zu bringen.

Wir theilen daher im Nachfolgenden ganz kurz unsere bisherigen Erfahrungen mit, indem wir hoffen, Ausführlicheres in Bälde nachtragen zu können.

Den meisten oxydirenden Substanzen gegenüber verhält sich das Morphin nicht einladend.

Ohne zahlreiche Versuche, welche kein befriedigendes Resultat ergaben, wie die Einwirkung von Chromsäure, Salpetersäure, Braunstein und Schwefelsäure etc. genauer zu beschreiben, wollen wir nur derjenigen Erwähnung thun, die irgend ein positives Ergebniss lieferten.[1]

Einwirkung von Kaliumpermanganat in schwach alkalischer Lösung verläuft ziemlich energisch und namentlich am Anfange tritt schnelle Entfärbung ein. Wenn nach allmäligem Erwärmen gegen 100° der Verbrauch schon sehr träge geworden ist, unterbricht man die Operation.

Aus der vom Manganniederschlage getrennten Lösung lässt sich weder so lange sie alkalisch ist, noch nach dem Ansäuren

---

[1] Hier sei auch bemerkt, dass das Morphin nach der Methode von C. Liebermann acetylirt, ein in prachtvollen Tafeln krystallisirtes Product liefert welches übrigens bei der Oxydation ein dem Morphin ganz analogen Verhalten zeigte.

irgend etwas durch Äther ausziehen. Als Hauptproduct der Reaction resultirt ein hellgelbbräunlich gefärbter saurer Syrup, der auch nach monatelangem Stehen kaum Spuren von Krystallisation zeigte. Auch Salze desselben wurden nur in amorpher Form erhalten. Bemerkenswerth ist das Verhalten desselben gegen Kupferacetat. Eine mit diesem Reagens versetzte Lösung bleibt klar, beim Erhitzen zum Sieden trübt sie sich und es fällt ein blaugrüner flockiger Niederschlag heraus, der sich nach dem Erkalten wieder auflöst.

Es erinnert dieses Verhalten an das der Cinchomeronsäure und Pyridintricarbonsäure unter ähnlichen Umständen.

Wird die syrupöse Säure mit Kalk gemischt, der trockenen Destillation unterworfen, so erhält man ein basisches Öl von ausgesprochenem Pyridingeruch.

Arsensäure wirkt auch im geschlossenen Rohre nicht energisch auf Morphin ein. Man erhält eine neue Base, die eine Methylgruppe weniger, dagegen ein Hydroxyl mehr zu enthalten scheint als das Morphin. Die Reaction verläuft nicht immer gleich, trotzdem wir nach Möglichkeit die gleichen Bedingungen einhielten. Die Ausbeuten sind wechselnd und nicht besonders, befriedigend.

Schmelzendes Ätzkali wirkt energisch auf Morphin ein. Nach kurzer Zeit färbt sich die Schmelze dunkelroth, später braun. Es entweichen stark alkalische Dämpfe.

Das Schmelzen muss ziemlich lange, bis zum beginnenden Verglimmen an der Oberfläche fortgesetzt werden, will man anders eine halbwegs brauchbare Ausbeute erzielen. Nach dem Ansäuren scheiden sich braunschwarze Flocken aus, humusartig und stickstofffrei. Die Lösung gibt an Äther ziemlich viel ab. Nach dem Verjagen des letzteren und Aufnahme des Rückstandes in Wasser bleibt eine amorphe Masse ungelöst. Die wässerige Lösung wird mit Bleiacetat gefällt. Aus dem Niederschlage erhält man nach dem Zersetzen mit Schwefelwasserstoff, Eindampfen, wiederholtem Reinigen und Umkrystallisiren Protokatechusäure von den bekannten Eigenschaften, deren Zusammensetzung auch durch die Analyse festgestellt wurde.

Das Filtrat entbleit und eingedampft, enthält immer noch etwas Protokatechusäure, die nur sehr schwierig durch wiederholte

Bleifällungen entfernt werden kann und ausserdem eine zweite Säure in durchsichtigen glasglänzenden Prismen anschiessend, ohne Eisenreaction, leicht löslich in Wasser und von deutlich saurem Geschmack. Da uns durch Zufall die reinste Partie derselben verloren ging, können wir leider vorderhand nichts über ihre Zusammensetzung aussagen. Als die Schmelze in einer silbernen Retorte mit vorgelegtem Kühler ausgeführt wurde, konnte man die entweichenden alkalischen Dämpfe in verdünnter Salzsäure auffangen. Man erhielt ein zerfliessliches Chlorhydrat, im Wesentlichen Methylaminsalz, dem aber noch eine geringe Menge einer zweiten Verbindung beigemischt war. Der Versuch muss in grösserem Massstabe angestellt werden, um über die Natur der zweiten Base Aufklärung zu erhalten.

Das Fehlen aromatischer Substanzen unter den Oxydationsproducten des Morphins bei Anwendung von Kaliumpermanganat einerseits, sowie das Nichtauftreten von Pyridin (oder Chinolin-) Abkömmlingen bei der Oxydation dieses Alkaloïds mit Ätzalcalien scheint bemerkenswerth und deutet darauf hin, dass im Morphin aromatische und Pyridin- (oder Chinolin-) Gruppen anders mit einander verbunden sein müssen als z. B. im Narcotin, welches bekanntlich eine leichte Trennung seiner beiden Hauptbestandtheile gestattet.

Um zu erfahren, ob etwa Chinolinabkömmlinge, namentlich hydrirte, in der Kalischmelze sich so zerlegen, dass der Pyridinkern zerstört wird und der Benzolkern in irgend einer Form erhalten bleibt, haben wir die Tetrahydrocinchoninsäure mit Kali verschmolzen und dabei die Abwesenheit jeglicher aromatischer Substanz (sowie auch die eines etwa zu erwartenden Oxyproductes) in der Reactionsmasse constatiren können. Ebenso haben wir eine Pyridindicarbonsäure (Cinchomeronsäure) der Einwirkung von schmelzendem Ätzkali unterworfen und bei diesem Versuche beobachtet, dass der Pyridinkern nicht zerstört wird, und kein basisches Product, etwa Methylamin oder Ammoniak entsteht.

Die Fortsetzung der Untersuchung wird hoffentlich darüber Aufschluss geben, in welcher Weise der aromatische und der stickstoffhältige Kern im Morphin mit einander verknüpft sind

Es sei zum Schlusse erwähnt, dass auch andere Opiumalkaloïde, so das Papaverin (siehe folgende Mittheilung), das Narcotin, das Narceïn und Thebaïn sich gegen schmelzendes Kali sehr reactionsfähig erweisen und neben anderen Producten wie es scheint fast stets Protokatechusäure liefern (mit Ausnahme vielleicht des Thebaïns). Die Narcotin-, respective Cotarninkalischmelze wird darum ein besonderes Interesse beanspruchen können, weil im Narkotin der stickstoffhältige Theil sicherlich ein Pyridinderivat ist und man das Schicksal dieses letzteren gegenüber schmelzendem Kali bei dieser Gelegenheit wird erfahren können. Aus diesem Grunde soll auch das Piperin in den Kreis dieser Untersuchungen gezogen werden, von dem man ja ebenfalls weiss, dass einer seiner Bestandtheile, das Piperidin, Hexahydropyridin ist.

Die Arbeiten hierüber sind im Gange.

Über Papaverin.

(Vorläufige Mittheilung.)

Von Dr. Guido **Goldschmiedt.**

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. v. Barth.)

Seit einiger Zeit bin ich mit dem Studium des Papaverins beschäftigt und eine grössere Anzahl von mit diesem Alkaloide ausgeführten Versuchen befindet sich in einem mehr oder weniger vorgeschrittenen Stadium der Untersuchung, ohne dass irgend Einer bereits abgeschlossen wäre. Wenn ich trotzdem die gemachten Beobachtungen in aller Kürze mittheile, so möge als Entschuldigung dafür angeführt werden, dass meine Arbeiten durch die Sommerferien eine längere Unterbrechung erleiden werden und ich mir durch nachstehende Notiz das ungestörte Arbeiten sichern möchte.

Vor Allen möge hier der Oxydationsversuche gedacht werden: Bei der Behandlung mit Braunstein und Schwefelsäure habe ich die Bildung brauner seideglänzender Nadeln, wie sie Merck bei dieser Reaction erhalten hat, nicht beobachtet. Aus dem Reactionsproducte wurden bisher nur nicht krystallisirende Substanzen neben unverändertem Papaverin gewonnen.

Übermangansaures Kalium in ziemlich grosser Verdünnung entwickelt beim Kochen mit Papaverin, Ammoniak, welches in vorgelegter Salzsäure aufgefangen worden ist; die entfärbte Lösung wurde vom Manganniederschlage getrennt und lieferte nach dem Einengen eine kleine Quantität Papaverin; die alkalische Flüssigkeit wird mit Kohlensäure gesättigt zur Trockene eingedampft und der Rückstand mit absolutem Alkohol extrahirt. Dieser hinterlässt einen gelben Syrup, der unter dem Mikroskope Krystallansätze zeigt. Die wässerige Lösung dieses Syrups gibt mit Kupferacetat eine geringe Menge eines blaugrünen Niederschlages, der beim Kochen sich bedeutend vermehrt, nach dem

Erkalten aber wieder verschwindet. Der Niederschlag wurde in Wasser suspendirt mit Schwefelwasserstoff zerlegt. Das Filtrat stellt nach dem Eindampfen einen sehr stark sauren Syrup dar, der Carbonate leicht zersetzt; auch die bisher dargestellten Salze dieser Säure sind amorph. Das Barytsalz fällt erst beim Kochen nieder, wenn man die Lösung des Ammoniumsalzes mit Chlorbarium versetzt; es gibt beim Glühen mit Kalk pyridinartig riechende Dämpfe.

Eine ganz kleine Probe Papaverin (etwa $^1/_{10}$ Grm.) liess beim Schmelzen mit Kalihydrat schon deutlich qualitativ die Bildung von Protocatechusäure nachweisen; die dabei entweichenden Dämpfe rochen ammoniakalisch und gleichzeitig aromatisch. In grösserem Massstabe wurde die Kalischmelze in einer silbernen Retorte ausgeführt, welche mit Kühler und Vorlage verbunden war, welche Letztere noch mit einem mit Salzsäure beschickten Peligot'schen Absorptionsapparate communicirte. Das Destillat bestand aus einer wässerigen stark alkalischen und einer öligen Schicht, welche bald theilweise erstarrte, dies aber selbst in einer Kältemischung nicht mehr that, nachdem sie mit Salzsäure geschüttelt worden war; die salzsauren Lösungen wurden vereinigt und mit Kalilauge versetzt, welche einen Niederschlag erzeugte, der als Papaverin an Schmelzpunkt und Schwefelsäurereaction erkannt wurde; die alkalische Lösung wurde nun destillirt, das Destillat mit Salzsäure neutralisirt hinterliess nach dem Eindampfen ein in schönen Blättchen krystallisirendes leicht zerfliessliches Chlorhydrat, dessen Platindoppelsalz genau den Platingehalt hatte, welcher dem Methylaminchloroplatinat zukömmt. Das ölige Destillat hat einen guajacolähnlichen Geruch, siedet constant bei 218°, gibt keine Farben-Reaction mit Eisenchlorid und hat die Zusammensetzung des Dimethylhomobrenzcatechins. Bei der Oxydation mit Chamäleonlösung erhält man Protocatechudimethyläthersäure, was durch Analyse und Schmelzpunkt (180°) erwiesen ist. Die Ausbeute an Dimethylhomobrenzcatechin wie auch an Methylamin ist eine sehr befriedigende.

Weniger einfach ist die Aufarbeitung der Schmelze selbst, in welcher sich als Hauptproduct der Oxydation Protocatechusäure in grosser Menge findet; in Einem Falle betrug die Ausbeute an

roher Protocatechusäure, wie sie durch Ausschütteln der angesäuerten Schmelze mit Äther gewonnen wurde, über 30 Percent des angewandten Papaverins. Diese rohe Säure enthält nur noch geringe Mengen Oxalsäure und einer schwer in Wasser löslichen krystallinischen Substanz, über welche ich noch nicht in der Lage bin etwas anzuführen. Beim Ansäuern der Schmelze fällt eine braune Substanz heraus, welche an kochendes Wasser einen in weissen Nadeln krystallisirenden Körper abgibt, der bei circa 106° schmilzt und mit Eisenchlorid eine rothe Färbung gibt. Noch eine in schönen weissen Nadeln krystallisirende Substanz mit violetter Eisenreaction wurde aus dem alkoholischen Auszuge der mit Kaliumcarbonat neutralisirten und eingedampften Schmelze erhalten. Mit dem Studium dieser Körper bin ich gegenwärtig beschäftigt.

Die beiden obengenannten flüchtigen Zersetzungsproducte des Papaverins, Dimethylhomobrenzcatachin und Methylamin, entstehen auch bei der trockenen Destillation des Alkaloids. Ebenso scheinen sie bei der Destillation mit Kalk oder Zinkstaub gebildet zu werden, wenigstens entsteht in beiden ein öliges, nach Guajacol riechendes und mit Eisenchlorid nicht reagirendes Destillat und entweichen basische Dämpfe.

Barytwasser wirkt äusserst langsam auf Papaverin ein; nach zehntägigem Kochen am aufsteigenden Kühler war nur ein kleiner Bruchtheil des angewandten Alkaloids zersetzt, obwohl während der ganzen Dauer des Versuches stetige, aber äusserst schwache Entwicklung ammoniakalischer Dämpfe nachweisbar war. Der mit Kohlensäure von Baryt befreite Rückstand enthielt neben unverändertem Papaverin nur ganz geringe Quantitäten einer guajacolähnlich riechenden Schmiere. Der Versuch soll bei höherer Temperatur und unter Druck wiederholt werden.

Natriumamalgam verwandelt Papaverin nach längerer Einwirkung in alkoholischer Lösung in ein dickes Öl, welches nach längerem Stehen Krystallansätze zeigt.

Mit Essigsäureanhydrid und essigsaurem Natrium gelingt es nicht, ein Acetylproduct des Papaverins darzustellen, woraus wohl auf das Fehlen von Hydroxylgruppen zu schliessen ist, um so eher als Papaverin sich nicht, wie beispielsweise Morphin, in Alkalien auflöst.

Erhitzt man Papaverin mit Salzsäure auf 130°, so entweicht nach dem Öffnen des Rohres ein Gas, welches mit Kalilauge gewaschen mit grüngesäumter Flamme brennt, also wohl Chlormethyl ist. Man hat eine klare Lösung, aus der durch Alkohol nichts fällbar ist. Der Verdampfungsrückstand ist ein dickes braunes Öl, dessen verdünnte alkoholische oder wässerige Lösung mit Eisenchlorid eine sehr intensive smaragdgrüne Färbung gibt, welche auf vorsichtigem Zusatze verdünnter Sodalösung in eine rothe übergeht, eine Reaction, welche wahrscheinlich durch die Gegenwart von Homobrenzcatechin veranlasst wird. Mit Kalilauge färbt sich das Öl in wässeriger Lösung dunkelbraun. Sodalösung erzeugt in der wässerigen Lösung des Öles einen weissen flockigen Niederschlag, der abfiltrirt bald harzartig zusammenbackt und an der Luft schnell grün wird. Die Eigenschaften dieses Körpers erinnern an jene des Apomorphins. Ich hoffe bald in der Lage zu sein, Näheres über das Papaverin mitzutheilen.